$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \operatorname{curl} F = \operatorname{rot} F$$

Παρατήρηση:
Το $\phi o\gamma$ είναι το σύνορο του $\phi(K)$ και λέμε ότι είναι θετικά προσανατολισμένο.

Το $\operatorname{curl} f = \operatorname{rot} f$ ονομάζεται στροβιλισμός του F (και μετράει κατά πόσο το διανυσματικό πεδίο ταχύτητας F "στροβιλίζεται" γύρω από ένα σημείο)

Άσκηση
Να επαληθευτεί το θεώρημα του Stokes για το $F(x,y,z) = (2y, 3x, -z^2)$ και την επιφάνεια $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=4 \ , z \geq 0\}$
ΛΥΣΗ

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$S = \phi(K)$

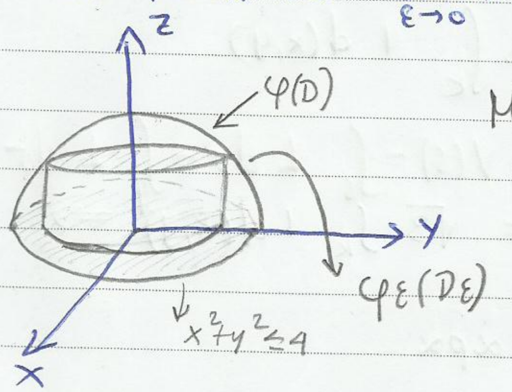
$$\phi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{4-x^2-y^2} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad K = D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$$

$$N(\varphi(x,y)) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1\right).$$

$$\int_\phi \nabla \times F \cdot n \, d\sigma = \int_D (\nabla \times F)(\varphi(x,y)) \cdot N(\varphi(x,y)) \, d(x,y)$$

$$= \int_D 1 \, d(x,y) = 4\pi.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ : Η παραμετρικοποίησή μας ϕ αυτή του άνω ημισφαιρίου δεν είναι "καλή" υπό την έννοια ότι στο $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4\}$ δεν μπορούμε να ορίσουμε (εύκολα) κάθετο διάνυσμα. Παρόλα αυτά ο υπολογισμός του ολοκληρώματος είναι σωστός, επειδή μπορούμε να θεωρήσουμε την $\phi_\varepsilon : D_\varepsilon \to \mathbb{R}^3$, $\phi_\varepsilon(x,y) = (x, y, \sqrt{4-x^2-y^2})^T$, $(x,y) \in D_\varepsilon$ όπου $D_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4-\varepsilon\}$ με $\varepsilon > 0$ και μετά το $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\phi_\varepsilon} (\nabla \times F)\, n\, d\sigma = \int_\phi (\nabla \times F) \cdot n\, d\sigma$



Μία παραμετρική για το D είναι η: $\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

$$\varphi(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \int_{\varphi\circ\gamma} F \cdot d(x,y,z) =$$

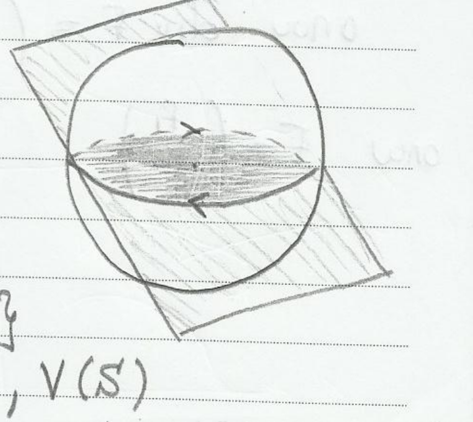
$$= \int_0^{2\pi} \overbrace{(4\sin\varphi, 6\cos\varphi, 0)}^{F((\varphi\circ\gamma)(\varphi))} \cdot \overbrace{(-2\sin\varphi, 2\cos\varphi, 0)}^{(\varphi\circ\gamma)'(\varphi)}\, d\varphi =$$

$= 4\pi$

Άσκηση

Με το Θ. του Stokes υπολογίστε το $\int_\Gamma (y,z,x) \cdot d(x,y,z)$ όπου η Γ θετικά προσανατολισμένη τομή του επιπέδου $x+y+z=0$ και τη σφαίρα $x^2+y^2+z^2=1$

ΛΥΣΗ



Αφού το επίπεδο $x+y+z=0$ περνάει από το $(0,0,0)$ η Γ είναι κύκλος ακτίνας r

$\Gamma = \{(x,y,-x-y) : x^2+y^2+(x+y)^2 = 1\}$

$S = \{(x,y,-x-y) : x^2+y^2+(x+y)^2 \leq 1\}$, $V(S)$

$\varphi(x,y) = (x, y, -x-y)^T \quad K = \{(x,y) : x^2+y^2+(x+y)^2 \le 1\}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Εξ άλλου, για $F(x,y,z) = (y, z, x)$

$$(\nabla \times F)(x,y,z) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \int_\Phi (\nabla \times F) n \, d\sigma =$$

$$= \int_K (\nabla \times F)(\varphi(x,y)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)(x,y) \, d(x,y) =$$

$$= \int_K \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} d(x,y) = -3 \int_K 1 \, d(x,y)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $\pi = V(S) = \int_S 1 \, d\sigma = \int_\Phi 1 \, d\sigma =$

$$= \int_K \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| d(x,y) = \sqrt{3} \int_K 1 \, d(x,y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \int_K 1 \, d(x,y) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ και άρα

$$\int_\Phi (\nabla \times F) n \cdot d\sigma = -\pi\sqrt{3} = \int_\Gamma (y,z,x) \, d(x,y,z) =$$

$$= \int_{\Phi \circ \gamma} \underbrace{(y,z,x)}_{F(x,y,z)} \cdot d(x,y,z)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ GAUSS (ή Θεώρημα Απόκλισης)

Έστω $V \subset \mathbb{R}^3$ ένα "συνεχώς διαφορίσιμο" κανονικό χωρίο ως προς τα επίπεδα xy, yz, xz, n εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στο ∂V και $F : M \to \mathbb{R}^3$ C^1 διανυσματικό πεδίο στο ανοιχτό $M \supset V$ τότε

$$\int_V \operatorname{div} F(x,y,z) \, d(x,y,z) = \int_{\partial V} F \cdot n \, d\sigma$$

όπου $\operatorname{div} F = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial y}, \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)(x,y,z) \, \partial V =$

όπου $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$ $\quad = \nabla \cdot F \quad$ όπου $\nabla F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$